

# Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы

Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов

**1. Регулярные операторы.** В работе [4] Биркгоф выделил класс обыкновенных дифференциальных операторов, для которых получил оценки ядер Грина и доказал теорему о разложении по собственным функциям. Операторы из этого класса он назвал *регулярными*. Напомним определение Биркгофа в упрощенной форме.

Пусть  $L$  — оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$(1) \quad l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y,$$

и  $n$  линейно независимыми краевыми условиями вида

$$(2) \quad U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} (a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Предполагаем, что коэффициенты  $p_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — суммируемые комплексные функции на отрезке  $[0, 1]$ . Считаем, что  $L$  действует в пространстве  $L_2(0, 1)$  и определен равенством  $L(y) = l(y)$  на области

$$D(L) = \{y \mid y^{(s)} \in AC[0, 1], s = 0, 1, \dots, n-1, l(y) \in L_2, U_j(y) = 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь  $AC[0, 1]$  — пространство абсолютно непрерывных функций.

Перепишем краевые условия, выделив старшие производные

$$(3) \quad U_j(y) := a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1) + \sum_{s=0}^{k_j-1} (a_{j,s} y^{(s)}(0) + b_{j,s} y^{(s)}(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Число  $k_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ,  $0 \leq k_j \leq n-1$ ) назовем *порядком краевого условия*, а число  $\varkappa = k_1 + \dots + k_n$  — *суммарным порядком*. Заменим краевые условия их линейными комбинациями, при которых суммарный порядок наименьший. Считаем, что получившиеся краевые условия имеют вид (3), причем нумерация такова, что  $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ . Тогда старшие линейные формы

$$U_j^0(y) = a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1), \quad j = 1, \dots, n,$$

также линейно независимы (иначе суммарный порядок можно понизить), что влечет  $k_j > k_{j+2}$ ,  $a_j b_j \neq 0$ .

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00712 и программы «Ведущие научные школы», грант № НШ-5247.2006.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При четном  $n = 2m$  оператор  $L$  назовем регулярным по Биркгофу, если не равен нулю определитель

$$\theta = \begin{vmatrix} a_1\varepsilon_1^{k_1} & \dots & a_1\varepsilon_{m-1}^{k_1} & a_1\varepsilon_m^{k_1} & b_1\varepsilon_{m+1}^{k_1} & \dots & b_1\varepsilon_n^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n\varepsilon_1^{k_n} & \dots & a_n\varepsilon_{m-1}^{k_n} & a_n\varepsilon_m^{k_n} & b_n\varepsilon_{m+1}^{k_n} & \dots & b_n\varepsilon_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

где  $\varepsilon_k = \exp(2\pi(k-1)i/n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — корни  $n$ -й степени из 1. При нечетном  $n = 2m - 1$  требуем, чтобы помимо этого определителя был также отличен от нуля определитель, получающийся заменой в  $m$ -ом столбце чисел  $a_j$  на  $b_j$ .

При  $n = 2m$  приведенное определение отличается от классического [4], [9], где требуется отличие от нуля еще одного числа, но несложно показать, что второе число может обращаться в нуль только одновременно с приведенным здесь первым числом. Коэффициенты  $p_j(x)$  дифференциального выражения и младшие члены в краевых условиях не участвуют в определении регулярности;  $L$  регулярен тогда и только тогда, когда регулярен оператор  $L_0(y) = (-i)^n y^{(n)}$ , порожденный краевыми условиями  $U_j^0(y) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Определение регулярности переносится на существенно более общие классы краевых задач со спектральным параметром. Для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем это сделано в [14], [12], [7], а теория регулярных задач для уравнений с частными производными построена в работах [6], [1], [2]. Интересно отметить, что для обыкновенных дифференциальных операторов порядка  $2m$  в случае распадающихся краевых условий можно определить регулярность по Лопатинскому и оно будет эквивалентным регулярности по Биркгофу (см. [13, § 9]).

Для формулировки основной теоремы о регулярных операторах удобно ввести дополнительные обозначения. Лучи  $\arg \rho = \pm(\pi/2n + \arg(i\varepsilon_k))$  в комплексной  $\rho$ -плоскости назовем критическими. Их число равно  $n$  и  $2n$  в четном и нечетном случаях, соответственно. Вырежем из  $\rho$ -плоскости открытые секторы раствора  $\varepsilon < \pi/(2n)$ , биссектрисами которых служат критические лучи, а оставшиеся  $n$  или  $2n$  замкнутых секторов обозначим через  $\Omega(\varepsilon)$ .

Если резольвентное множество оператора  $L$  непусто, то из компактности вложения  $D(L) \subset L_2(0, 1)$  (мы снабжаем  $D(L)$  нормой графика оператора  $L$ , тогда  $D(L)$  становится гильбертовым пространством) следует, что спектр  $L$  дискретный, т.е. состоит из изолированных собственных значений  $\{\lambda_k\}_1^\infty$  конечной алгебраической кратности. Обозначим через  $\rho_{k,j}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , корни уравнения  $\lambda_j = \rho^n$ , через  $B_{k,j}(\delta)$  — круги радиуса  $\delta$  в  $\rho$ -плоскости с центрами в точках  $\rho_{k,j}$ , и через  $B(\delta)$  — объединение всех таких кругов по обоим индексам  $k$  и  $j$ . Известно [9], что резольвента  $L$  есть интегральный оператор

$$(L - \rho^n)^{-1}f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \rho)f(\xi)d\xi,$$

где  $G(x, \xi, \rho)$  — ядро Грина. Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Оператор  $L$  регулярен по Биркгофу;  
 2) при любом  $\delta > 0$  всякий некритический луч, выходящий из нуля, асимптотически не пересекает множество  $\mathbb{C} \setminus B(\delta)$ , и для всех  $x, \xi \in [0, 1]$  и  $\rho \in \mathbb{C} \setminus B(\delta)$  для функции Грина справедлива оценка

$$(4) \quad |G(x, \xi, \rho)| \leq M|\rho|^{-n+1},$$

где постоянная  $M = M(\delta)$  не зависит от  $x, \xi, \rho$ ;

- 3) найдется последовательность точек  $\{\rho_k\}$  в одном из секторов множества  $\Omega(\varepsilon)$  (в случае нечетного  $n$  — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что  $\rho_k \rightarrow \infty$  и оценка (4) выполнена при  $\rho = \rho_k$ ;  
 4) при любом  $\varepsilon > 0$  в области  $\Omega(\varepsilon)$  выполняется оценка

$$(5) \quad \|(L - \rho^n)^{-1}\| \leq M|\rho|^{-n}, \quad |\rho| \geq |\rho_0|,$$

где постоянная  $M = M(\varepsilon, \rho_0)$  не зависит от  $\rho$ , а  $\|\cdot\|$  означает норму в  $L_2$ ;

- 5) найдется последовательность точек  $\{\rho_k\}$  в одном из секторов множества  $\Omega(\varepsilon)$  (в случае нечетного  $n$  — две последовательности в двух соседних секторах этого множества), такая, что  $\rho_k \rightarrow \infty$  и оценка (5) выполнена при  $\rho = \rho_k$ ;  
 6) система собственных и присоединенных функций оператора  $L$  образует безусловный базис со скобками в пространстве  $L_2$ , причем в скобки объединяются не более двух собственных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация  $1) \Rightarrow 2)$  доказана Биркгофом [4]. Формально в [4] (см. также [9]) оценка (4) доказана на некоторой последовательности контуров, уходящих на бесконечность. Однако при условии регулярности, оценку снизу характеристического определителя (голоморфной функции, нули которой совпадают с числами  $\rho_{k,j}$ ) легко провести вне множества  $B(\rho)$ . Тогда оценка (4) получается при всех  $\rho \in \mathbb{C} \setminus B(\rho)$ . Импликация  $1) \Rightarrow 4)$ , доказана Бензингером [3]. Импликации  $2) \Rightarrow 3)$  и  $4) \Rightarrow 5)$  тривиальны, а  $5) \Rightarrow 1)$  доказана Минкиным в его недавней работе [8]. Импликация  $1) \Rightarrow 6)$  доказана Шкаликовым [11] (там же см. ссылки на предшествующие работы Н. Данфорда и Дж. Шварца, Г. М. Кесельмана и В. П. Михайлова на эту тему). Остается доказать  $4) \Rightarrow 1)$  и  $6) \Rightarrow 1)$ . Доказательства обеих этих импликаций нетривиальны, в них существенно используются результаты и приемы недавней работы Минкина [8]. Подробное изложение будет дано в другой работе, здесь отметим только один вспомогательный результат, играющий важную роль.

ЛЕММА. Пусть  $\{\alpha_k\}_1^\infty$  — комплексные, не равные нулю числа, аргументы которых различны. Положим

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^n c_{k,j} e^{\alpha_k \rho_j x} (1 + \varphi_{k,j}(x)),$$

где  $c_{k,j}$  — произвольные числа, такие что  $|c_{1,j}| + \dots + |c_{n,j}| \neq 0$ , а  $\|\varphi_{k,j}\|^2 = o(|\rho_j|^{-1})$  при  $|\rho_j| \rightarrow \infty$ . Назовем критическими лучи, аргументы которых равны  $\pm\pi/2 + \arg \alpha_k$ . Последовательность  $\{\rho_j\}_1^\infty$ , занумерованную в порядке возрастания модулей, назовем редкой, если найдется целое число  $l$ , такое, что  $|\rho_{j+l}/\rho_j| \geq 2$  при всех  $j \geq 1$ .

Пусть система  $\{\psi_j(x)\}_1^\infty$  образует базис Рисса со скобками в замыкании своей линейной оболочки в пространстве  $L_2(0, 1)$ , причем в скобки заключаются не более фиксированного числа  $N$  функций. Тогда в каждом замкнутом секторе, не содержащем критических лучи, последовательность  $\{\rho_j\}$  является редкой.

□

**2. Вполне регулярные операторы.** Здесь будем рассматривать дифференциальные операторы четного порядка  $n = 2m$ , заданные дифференциальным выражением

$$(6) \quad l(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \left\{ (p_k(x)y^{(k)})^{(k)} - \left[ (q_k(x)y^{(k)})^{(k-1)} + (r_k(x)y^{(k-1)})^{(k)} \right] \right\},$$

где  $p_m(x) = 1$ ,  $r_0(x) = 0$ . Чтобы не усложнять существо дела, предположим, что коэффициенты  $p_k(x)$ ,  $q_k(x)$ ,  $r_k(x)$  таковы, что после раскрытия производных дифференциальное выражение приводится к виду (1). Для этого достаточно, чтобы  $p_k(x)$ ,  $r_k(x) \in W_1^k[0, 1]$ ,  $q_k(x) \in W_1^{k-1}[0, 1]$ .

Введем квазипроизводные

$$(7) \quad \begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad y^{[m]} = y^{(m)} - r_m y^{(m-1)}, \\ y^{[m+k]} &= -(y^{[m+k-1]})' + p_{m-k} y^{(m-k)} + [q_{m-k+1} y^{(m-k+1)} - r_{m-k} y^{(m-k-1)}], \\ &\quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при фиксированном  $x$  функционал  $y^{[k]}(x)$  является линейной комбинацией функционалов  $y^{(s)}(x)$ ,  $s = 0, \dots, k$ , и наоборот. Поэтому краевые условия можно записать в виде

$$(8) \quad By^\wedge + Cy^\vee = 0,$$

где  $B$  и  $C$  — некоторые матрицы, а  $y^\wedge$  и  $y^\vee$  — векторы значений квазипроизводных:

$$\begin{aligned} y^\wedge &= (y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0), y(1), y'(1), \dots, y^{(m-1)}(1))^t, \\ y^\vee &= (y^{[2m-1]}(0), y^{[2m-2]}(0), \dots, y^{[m]}(0), -y^{[2m-1]}(1), -y^{[2m-2]}(1), \dots, -y^{[m]}(1))^t, \end{aligned}$$

где верхний индекс  $t$  означает транспонирование.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Оператор  $L$ , порожденный дифференциальным выражением (6) и краевыми условиями (8), назовем вполне регулярным, если выполнено условие  $B^{-1}(\text{im } C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$ , где  $B^{-1}$  понимается как взятие полного прообраза от  $\text{im } C$  при отображении  $B$ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор  $L$  задан выражением (6) и краевыми условиями (8). Следующие утверждения эквивалентны .

- 1) Оператор  $L$  является вполне регулярным.
- 2) Числовой образ оператора  $L$  не совпадает со всей комплексной плоскостью.
- 3) Числовой образ оператора  $L$  содержится в некоторой полуплоскости в  $\mathbb{C}$ .
- 4) Квадратичная форма оператора  $(Ly, y)_{L_2}$  представима в виде

$$(9) \quad \sum_{k=1}^m [(p_k y^{(k)}, y^{(k)})_{L_2} + (q_k y^{(k)}, y^{(k-1)})_{L_2} - (r_k y^{(k-1)}, y^{(k)})_{L_2}] + (Ay^\wedge, y^\wedge)_{\mathbb{C}^{2m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из свойства выпуклости числового образа.

Импликация 1)  $\Rightarrow$  4) для случая  $q_k = r_k \equiv 0$  доказана в работе [15]. В общем случае доказательство можно провести аналогично. Чтобы показать справедливость обратного утверждения докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть матрица  $A$  такова, что для всех  $x, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^{2m}$  справедливо равенство  $(y_2, x)_{\mathbb{C}^{2m}} = (Ay_1, x)_{\mathbb{C}^{2m}}$ , если  $x \in B^{-1}(\text{im } C)$  и  $B y_1 + C y_2 = 0$ . Тогда оператор  $L$  вполне регулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что  $B^{-1}(\text{im } C) \perp \ker C$ . Пусть векторы  $y_1$  и  $y_2$  таковы что  $B y_1 + C y_2 = 0$ . Тогда  $y_1 \in B^{-1}(\text{im } C)$  и  $(y_2, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = (A y_1, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}}$ . Поскольку  $B y_1 + C(y_2 + v) = 0$  для любого  $v \in \ker C$ , то  $(y_2 + v, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = (A y_1, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}}$ . Поэтому  $(v, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = 0$ , т.е.  $B^{-1}(\text{im } C) \perp \ker C$ .

Равенство  $B^{-1}(\text{im } C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$  следует теперь из того, что краевые условия линейно независимы.  $\square$

Доказательство импликации 4)  $\Rightarrow$  3) следует из компактности вложений  $W_2^r \subset W_2^m$  при  $r \leq m - 1$  и компактности операторов следа  $T_0 y = y^{(r)}(0)$  и  $T_1 y = y^{(r)}(1)$  как операторов из  $W_2^m$  в  $\mathbb{C}$ . Доказательство обратной импликации более сложно и здесь мы его не приводим. В нем используется прием из работы [10].  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякий вполне регулярный оператор регулярен. Действительно, если  $L$  вполне регулярен, то его числовой образ лежит в некоторой полуплоскости, а потому найдется сектор в комплексной плоскости, в котором резольвента  $(L - \rho^m)^{-1}$  имеет оценку (5). Тогда по теореме 1 оператор  $L$  регулярен. Обратное, вообще говоря, неверно. Это показывает следующий пример.

**Пример.** Пусть  $Ly = y^{(4)}$ , а краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} -y'''(0) + y''(0) + y(0) = 0 \\ y'''(1) + y(1) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}.$$

Простая проверка показывает, что  $L$  регулярен, но не вполне регулярен.

## Список литературы

- [1] S. Agmon, S. Nirenberg. *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*// Commun. Pure Appl. Math., 15 (1962), p. 119-147.
- [2] М. С. Агранович, М. И. Вишик. *Эллиптические задачи с параметром и гиперболические задачи общего вида*// УМН, 19, № 3, стр. 53-161.
- [3] Н. Е. Benzinger. *Green's function for ordinary differential operators*// J. Diff. Equations, vol. 7, 1970, No. 3, p. 478-496.
- [4] G. Birkhoff. *Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations*// Т.А.С., 1908, oct, p. 373-395.
- [5] Като. *Теория возмущений линейных операторов*// Москва, «Мир», 1972 г.
- [6] Я. Б. Лопатинский. *Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа и регулярные интегральные уравнения*// Украинский математический журнал, 5 (1953), стр. 123-151.
- [7] Л. М. Лузина. *Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов на конечном интервале*// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, МГУ, 1991.
- [8] А. М. Minkin. *Resolvent's growth and Birkhoff-regularity*// Journ. Math. Anal. Appl., v. 323 (2006), p. 387-402.
- [9] М. А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы*// Москва, «Наука», 1969.
- [10] Е. А. Ширяев. *Диссипативные краевые условия для обыкновенных дифференциальных операторов*// Матем. заметки, 2005, том 77, выпуск 6, стр. 950-954.
- [11] А. А. Шкаликов. *Базисные свойства собственных функций обыкновенного дифференциального оператора*// Успехи математических наук, 1979, т. 34, ном. 5, стр. 235-236.
- [12] А. А. Шкаликов. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*// Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, стр. 190-229.
- [13] А. А. Шкаликов. *Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и соответствующие спектральные задачи*// Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 14, стр. 140-224.
- [14] Я. Д. Тамаркин. *О некоторых задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*// Петроград, 1917.
- [15] А. А. Владимиров. *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов*// Математические заметки, 2004, т. 75, вып. 6, с. 941-943.